

۱ صفر زوج است یا فرد؟

داود معصومی مهوار

استدلال‌های
بدون پشتوانه
مردودند!



داستان‌های
ریاضی

فرزانه: مگر با داشتن $12 = 2 \times 6$ حکم نمی‌کنیم که ۱۲ زوج است؟ در واقع چون می‌بینیم که ۱۲ مضرب ۲ است، حکم می‌کنیم که ۱۲ زوج است. اینجا هم داریم: $0 = 3 \times 0$ یعنی صفر مضرب ۳ است که ۳ نیز عددی فرد است. پس صفر هم باید عددی فرد باشد.

اعظم: این حرف درست نیست. ما مثالی زدیم که حرفشان را رد می‌کرد. مثلاً $10 = 2 \times 5$ را ببینید. ۱۰ مضرب ۵ است که ۵ هم عددی فرد است. آیا اینجا هم باید بگوییم ۱۰ عددی فرد است؟

من: خب با این استدلال اعظم چه می‌گویید؟ کوتاه نمی‌آیید؟ **فریبا:** نه. در خود مثال اعظم به روشنی می‌بینیم که ۱۰ مضرب ۲ هم هست. از اینجا حکم می‌کنیم که ۱۰ زوج است نه فرد. ولی در $0 = 3 \times 0$ اثری از ۲ نیست. در واقع صفر ضرب در هر عددی برابر صفر است و $0 = 2 \times 0$ از این جهت است، نه به‌خاطر اینکه صفر زوج است.

من: کسی حرف دیگری ندارد؟

اعظم: خب شدنی نیست که یک عدد هم زوج باشد و هم فرد. **من:** تازه به کلاس رسیده‌ام: سلام بچه‌ها. امروز زودتر از من شروع کرده‌اید. کجایید؟ بحث چیست؟

فریبا: مربوط به درس و تمرین‌های امروز نیست. دربارهٔ زوج و فرد بودن صفر اختلاف داریم.

آزاده: امکان دارد که این بحث را ادامه بدهیم؟ می‌دانم ربطی به درس امروز ندارد.

من: اتفاقاً با همان یک جملهٔ اعظم که شنیدم، حدس زدم که چه چیزهایی گفته‌اید. راستش را بخواهید بی‌ربط هم نیست. قول داده بودم دربارهٔ استدلال بیشتر گفت‌وگو کنیم و این گفت‌وگو شما شروع خوبی است. خب بگویید ببینم از کجا شروع کرده‌اید؟

مریم: از اینجا شروع شد. من توجه کردم که: $0 = 3 \times 0$ و از این تساوی حکم کردم که صفر فرد است. طرفدار هم دارم.

من: یکی از طرفدارها بگوید که چطور از این تساوی حکم کردید که صفر فرد است.

تکیه بدهید. به این دلیل تنها گفته‌های نفیسه و زهرا شبیه استدلال هستند. البته گفته‌های لیلا و سوده هم با کمی اصلاح استدلال هستند.

نفیسه: حرف من چه چیزی کم داشت؟ من از روی تعریف عدد زوج استدلال کردم.

من: خوب به همین موضوع باید اشاره می‌کردی. باید تعریف عدد زوج را می‌گفتی. نباید بخشی از استدلال را به عهده شونده بگذاری. الان یک بار دیگر بگو و استدلال را کامل کن. **نفیسه:** بنا بر تعریف، هر عددی که مضرب صحیحی از ۲ باشد، زوج است. چون می‌دانیم $0 \times 2 = 0$ و صفر عددی صحیح است، پس می‌بینیم که صفر نیز حاصل ضرب عددی صحیح در ۲ است. پس بنا بر تعریف باید زوج باشد.

من: این استدلال تقریباً عالی است. هر کس بخواهد آن را قبول نکند باید یکی از پایه‌های آن را با دلیلی قابل قبول رد کند و اگر نتواند باید آن را بپذیرد.

نفیسه: تقریباً عالی است؟ یعنی هنوز هم کم و کاستی دارد؟ **من:** برای شما که تازه استدلال را یاد می‌گیرید، عالی است. ولی راستش را بخواهید یک کاستی دارد. اگر تک‌تک جمله‌ها را به دقت بررسی کنید، پایه‌های استدلال را تشخیص می‌دهید و آن کاستی را پیدا می‌کنید. البته راست و ریست کردن آن کار شما نیست. اطلاعات ریاضی شما خیلی دقیق نیست. بنابراین همین حد بسیار عالی است.

نفیسه: فکر می‌کنم فهمیدم. من در استدلالم گفتم: «می‌دانیم $0 \times 2 = 0$ است» ولی نگفتم از کجا می‌دانیم.

من: بله درست گفتی. اینکه حاصل ضرب هر عدد در صفر برابر خود صفر می‌شود، یک قضیه است که شما اثبات و استدلال آن را نمی‌دانید. ولی واقعاً لازم نیست که شما الان این قدر دقیق استدلال کنید. پس از آن رد می‌شویم و به مشکلات دیگر می‌پردازیم.

فریبا: ولی به نظر من استدلال نفیسه درست نیست. او اصلاً به آنچه ما گفتیم، توجه نکرده است. اصلاً هیچ پاسخی به ما نداده است.

من: همه حرف من همین است که باید بدانید به چه چیزهایی توجه کنید. الان از شما هم همین را می‌خواهم. اگر استدلال شما برای فرد بودن صفر درست است، باید دقیق‌تر بیان کنید و بگویید که به چه چیزهایی تکیه کرده‌اید. از تعریف کمک گرفته‌اید؟ به قضیه‌ای توجه کرده‌اید؟

فریبا و چند نفر دیگر: ما دیدیم که بنا بر $0 \times 2 = 0$ می‌گویند صفر زوج است. به آن‌ها گفتیم که صفر برابر با 0×3 نیز هست! با این چه می‌کنند؟ آیا نباید از این تساوی حکم به فرد بودن صفر بدهند؟

من: هیچ نگفتم و منتظر ماندم و نگاه می‌کردم. همه فکر می‌کردند. بعضی هم فریبا را تأیید می‌کردند.

لیلا: فکر می‌کنم فریبا درست نمی‌گوید. واقعاً کسی بنا بر

نفیسه: پس بالاخره قبول دارید که $0 \times 2 = 0$ است. خوب از همین تساوی باید زوج بودن صفر را بپذیرید.

مهری: فریبا خوب توضیح داد. این تساوی به خاطر خاصیت ویژه صفر است که حاصل ضرب آن در هر عددی برابر خود صفر می‌شود. ربطی به زوج بودن ۲ ندارد. هر عدد دیگری جای آن بگذارید، فرقی در نتیجه نمی‌بینید.

زهرا: مشکل استدلال مهری و فریبا این است که در حاصل ضرب 0×2 به صفر توجه می‌کنند و علت برابری این حاصل ضرب با صفر را به خاطر خاصیت‌های صفر می‌دانند. این چه اهمیتی دارد؟ وقتی 5×2 برابر ۱۰ می‌شود، چه کار به ۵ داریم؟ همین که ۱۰ مضرب ۲ شده است، حکم می‌کنیم که ۱۰ زوج است یا همین که 6×2 برابر ۱۲ می‌شود، حکم می‌کنیم که ۱۲ زوج است. یعنی چه که «این برابری به خاطر ۲ نیست، به خاطر فلان است»؟

لیلا: من گفتم که اگر دو تا از عددهای زوج کم کنیم، یا به آن‌ها اضافه کنیم، حاصل همیشه عددی زوج خواهد بود. اگر هم دو تا از عددی فرد کم کنیم یا دو تا به آن اضافه کنیم، حاصل باز هم عددی زوج خواهد بود. پس اگر صفر عددی فرد باشد، دو تا بیشتر از آن، یعنی عدد $2+2=0$ ، باید عددی فرد باشد. در صورتی که نیست. می‌دانیم ۲ عددی زوج است. همه در این باره یک نظر داریم.

سوده: من هم شبیه لیلا استدلال کردم که یکی بیشتر یا کمتر از یک عدد زوج باید فرد باشد و همین‌طور، یکی بیشتر یا کمتر از یک عدد فرد هم باید زوج باشد. به عبارت دیگر، هیچ دو عدد زوجی و هیچ دو عدد فردی متوالی نیستند. ولی اگر قبول کنیم که صفر فرد است، آن‌گاه چون عدد ۱ فرد است، دو عدد فرد متوالی خواهیم داشت.

فرزانه: شاید در نظر اول حرف لیلا و سوده درست به نظر بیاید، ولی ما موردی در ریاضیات داریم که خلاف آن را نشان می‌دهد. درباره عددهای اول و مرکب همگی خوب یادمان هست که اگر عددی تنها مضرب خودش یا ۱ باشد، اول به حساب می‌آید: البته به جز خود عدد ۱ که اول به حساب نمی‌آید. یعنی با اینکه عدد ۱ مضرب هیچ عدد دیگری به جز خودش نیست، آن را اول به حساب نمی‌آورند. اینجا هم درباره صفر می‌توانیم همین‌طور فکر کنیم.

من: خوب، حرف‌ها و استدلال‌های مختلفی شنیدیم. از این به بعد با دستور من ادامه می‌دهیم و من راه را نشان خواهیم داد. پس خوب گوش کنید.

بیشتر گفته‌هایتان استدلال نیست. مثال نقضتان مثال نقض نیست. در پی شباهت‌ها هستید. راستش را بخواهید، من این‌طور دیدم که برای نقد یک گفته، آن را می‌شنوید، ورنه می‌کنید، کمی فکر می‌کنید و نظر می‌دهید. استدلال این‌گونه نیست. باید پایه‌های استدلال را تشخیص دهید. خودتان هم باید تک‌تک جمله‌هایتان را به دانسته‌ها، قضیه‌ها و تعریف‌ها

من: بله، خیلی خوب گفתי. حرف لیلا و نیز حرف سوده که شبیه آن بود، هر دو درست بودند، ولی همین کاستی را داشتند. از طرف دیگر، این بار بخت با ما یار است. اثبات این گفته‌های لیلا و سوده آسان است. مثل مورد قبلی، یعنی «حاصل ضرب صفر ضرب در هر عدد، برابر صفر است» نیست که گفتم در حد ما نیست. اما برای شروع و سادگی کار فعلاً ثابت می‌کنیم که دو تا بیشتر از یک عدد زوج، عددی زوج است. اثبات بقیه حرف‌های لیلا و سوده نیز به همین شباهت دارد و سخت نیست.

لیلا با اشاره من پای تخته آمد و استدلال زیر را نوشت:

a عددی زوج است.

بنا بر تعریف باید داشته باشیم:

$a = 2 \times k$ که k عددی صحیح است.

حالا به $a+2$ توجه می‌کنیم:

$$a+2 = 2 \times k + 2 \times 1 = 2 \times (k+1)$$

از آنجا که k عددی صحیح است، یکی بیشتر

از آن یعنی $k+1$ نیز صحیح است.

پس چون داریم: $a+2 = 2 \times (k+1)$ ، یعنی $a+2$ نیز

حاصل ضرب ۲ در یک عدد صحیح است و

باید زوج باشد.

ثابت کردیم که اگر عددی زوج باشد، دو تا

بیشتر از آن هم عددی زوج است.

من: خیلی خوب بود. کامل و بی‌نقص. پس از این به بعد حواستان باشد که باید حرف‌های خود را به تعریف‌ها و قضیه‌ها تکیه دهید و اگر چیزی می‌گویید که از این دست نیست، باید دلیل آن را به روشنی و باز هم با تکیه به تعریف‌ها، قضیه‌ها، اصل‌ها و بدیهی‌ها بیان کنید.

خیلی از بچه‌ها: این کار خیلی سخت است! شدنی نیست.

من: درست می‌گویید. واقعاً قرار نیست که شما همه چیز را این‌طور یاد بگیرید و بیان کنید. مثلاً اگر به گذشته برگردید، انبوهی از چیزهای ریاضی یاد گرفته‌اید که دلیل درستی آن‌ها را نمی‌دانید. مثلاً مخرج مشترک گرفتن، پیدا کردن بزرگ‌ترین بخش‌یاب مشترک و ... واقعاً لازم نیست همه ریاضی‌دان شوند و دلیل درستی همه این‌ها را بدانند.

ولی از طرف دیگر، باید به خوبی با استدلال کردن آشنا شوید تا بیخودی مردم را در معرض سرطان تصور نکنید یا اشتباه‌های دیگری از این دست را باور نکنید و سنجیده قضاوت کنید. کم‌کم بیشتر با استدلال آشنا می‌شوید. همین الان هم خوب آشنا شده‌اید.

« $2 \times 0 = 0$ » نگفته که ۲ زوج است.

من همین جا حرف لیلا را قطع کردم و همه سکوت کردند. کم‌کم بچه‌ها لیلا را تأیید می‌کردند. فریباً هم سرش را تکان داد و تأیید کرد و از او خواستم که صحبت کند.

فریبا: الان فهمیدم. آن‌ها تنها به کمک آن تساوی حکم نکرده‌اند. کلی حرف زده‌اند و از تعریف کمک گرفته‌اند و بالاخره حکم کرده‌اند که ۲ زوج است. اما این کار ما اشتباه بود که تنها یک جمله از استدلال را گرفتیم و به بقیه بی‌توجه بودیم.

فرزانه: شاید اشتباه کنم، ولی شما می‌گویید اصلاً به $0 \times 3 = 0$ توجه نکنیم؟

من: بله، اصلاً توجه نکنید. در تعریف آمده است: «اگر عددی حاصل ضرب ۲ در یک عدد صحیح باشد، آن عدد حتماً زوج است»، همین. حالا اگر حاصل ضرب ۵ در عدد دیگری هم باشد، چه عیبی دارد؟

بچه‌ها خوب توجه کنید. در خیلی موردهای دم دست‌تر، شما این اشتباه را انجام نمی‌دهید. مثلاً فرض کنید یک گروه پژوهشگر نتیجه پژوهش‌های خود را چنین بیان کند: «اگر کسی به‌طور مداوم روزانه پنج قوطی نوشابه بخورد، پس از ۳۵ سال حتماً به سرطان معده مبتلا خواهد شد.»

آیا کسی از شما اعتراض خواهد کرد که: «همسایه ما نوشابه نمی‌خورد، ولی سرطان معده گرفت!» نه! آن‌ها به همه شرط‌ها کاری ندارند. تنها نتیجه ۳۵ سال نوشابه خوردن مداوم، آن هم روزی پنج قوطی را بررسی کرده‌اند. اگر می‌خواهید پژوهش آن‌ها را زیر سؤال ببرید، باید کسی را پیدا کنید که ۳۵ سال به‌طور مداوم روزی پنج قوطی نوشابه خورده باشد، ولی سرطان معده نگرفته باشد. آن‌ها حرف دیگری ندارند. همه عامل‌هایی را که باعث سرطان معده می‌شوند، بررسی نکرده‌اند. حرف مشخصی دارند.

بگذریم. می‌دانم هنوز هم در این باره پرسش دارید، ولی فعلاً همین‌قدر بس است. یک استدلال دیگر را بررسی می‌کنیم تا ببینم خوب یاد گرفته‌اید یا نه. پس برمی‌گردیم به استدلال لیلا و سوده.

لیلا (با اشاره من): من گفتم که دو تا بیشتر یا دو تا کمتر از هر عدد فرد باید فرد باشد. پس اگر استدلال فریبا را می‌پذیرفتیم و حکم می‌کردیم که صفر نیز فرد است، آن‌گاه باید بپذیریم که دو تا بیشتر از صفر هم فرد است؛ یعنی $2+0 = 2$ نیز باید فرد باشد که چنین نیست. ولی الان می‌دانم که چرا این استدلال ناقص است.

من نگذاشتم لیلا بیشتر چیزی بگوید و خواستم که همه فکر کنند تا دیگران کاستی را بیابند.

اعظم (بعد از ۲۰ ثانیه): فکر کنم روشن است. اینکه دو تا بیشتر یا کمتر از یک عدد فرد، فرد است، حرفی درست است. ولی لیلا اشاره نکرد که چرا این حرف درست است. آیا تعریف است؟ آیا قضیه است؟